УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

И. Е. Егоров, В. Е. Федоров

Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка

Якутск 1998

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В242

Утверждено Советом университета

Рецензенты:
С. Г. Пятков, д.ф.-м.н., профессор, в.н.с. ИМ СО РАН,
Ю. С. Антонов, к.ф.-м.н., доцент кафедры информатики и вычислительного эксперимента ЯГУ

Егоров И. Е., Федоров В. Е.
В242 **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА.** Учебное пособие. Якутск: Изд-во Якутского ун-та, 1998. 44 с.
ISBN 5-7513-0171-4

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены методы исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа второго порядка в пространствах С. Л. Соболева.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области дифференциальных уравнений и математического моделирования.

1602000000-33
В ——————— Без. объявл. **ББК 22.161.6**
2К9(25)-98

ISBN 5-7513-0171-4

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Начало исследований краевых задач для неклассических уравнений математической физики было положено в 20-е - 30-е годы в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где впервые были поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа на плоскости.

В работах М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, С.А. Христиановича, С.А. Чаплыгина, К.Г. Гудерлея и других было указано на важность проблемы неклассических уравнений математической физики при решении задач, возникающих в трансзвуковой газовой динамике, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака и во многих прикладных задачах механики.

Новым этапом в развитии теории краевых задач для неклассических уравнений явились работы Г. Фикеры, О.А. Олейник. В этих работах были предложены новые подходы и методы для построения единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений. В.Н. Враговым и рядом авторов было начато построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа, в частности, для гиперболо-параболических уравнений. В дальнейшем эта теория развивалась во многих направлениях, в том числе для уравнений высокого порядка.

В настоящем пособии излагаются некоторые аспекты построения теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка. Его содержание основано на материале спецкурса, читаемого в течение ряда лет студентам математического факультета ЯГУ.

В первой главе рассматривается краевая задача в постановке В.Н. Врагова, во второй - А.Н. Терехова; в третьей главе изучается первая краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Порядок изложения одинаков для всех трех задач: вначале дается постановка краевой задачи и выводится априорная оценка, далее доказывается обобщенная разрешимость задачи, и затем устанавливаются условия существования регулярного решения. Для изучения этих краевых задач применены метод регуляризации, метод Галеркина, функциональный метод. При этом используется методика исследований, разработанная авторами для уравнений высокого порядка общего вида. В данном учебном пособии для доступности и наглядности изложения она показана на примере уравнений второго порядка.

ГЛАВА I

Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка

1. Постановка краевой задачи и априорная оценка

Пусть $\Omega \subset R^n$-ограниченная область с гладкой границей S, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j}) + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t). \quad (1.1)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и выполнены условия

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \ \ \forall \xi \in R^n, \ \ \nu > 0. \qquad (k_{11})$$

Отметим, что коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области произвольным образом. Поэтому в класс уравнений вида (1.1) входят эллиптико - гиперболические, эллиптико - параболические, гиперболо - параболические, вырождающиеся и другие уравнения.

Положим

$$P_0^{\pm} = \{(x, 0) : k(x, 0) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}, \ x \in \Omega\},$$

$$P_T^{\pm} = \{(x, T) : k(x, T) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}, \ x \in \Omega\}.$$

Введем в рассмотрение пространство Соболева $W_2^1(Q)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int\limits_Q \left[uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} \right] dQ,$$

и нормой $\| u \|_1^2 = (u,u)_1$; $(u,v) = \int\limits_Q uv dQ$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1.1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{\overline{P_0^+}} = 0, u_t|_{\overline{P_T^-}} = 0. \tag{1.3}$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3).

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия $c(x) \geq 0$,

$$2a - k_t \geq \delta > 0. \tag{k_{12}}$$

Тогда существует константа $\lambda > 0$, такая, что имеет место неравенство

$$(Lu, e^{-\lambda t} u_t) \geq C_1 \| u \|_1^2, \ C_1 > 0,$$

для всех функций $u \in C_L$.

Доказательство. После интегрирования по частям с учетом условий (1.2), (1.3) имеем

$$(Lu, e^{-\lambda t} u_t) = \frac{e^{-\lambda T}}{2} \int\limits_{P_T^+} k u_t^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{P_0^-} k u_t^2 dx +$$

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2} \int\limits_{\Omega_T} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + cu^2 \right] dx +$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_Q e^{-\lambda t} \left[(2a - k_t + \lambda k) u_t^2 + \lambda \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \lambda c u^2 \right] dQ.$$

Существует число $\lambda > 0$, такое, что

$$2a - k_t + \lambda k \geq \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому в силу условия (k_{11}) получаем оценку

$$(Lu, e^{-\lambda t}u_t) \geq e^{-\lambda T}\int\limits_Q\left[\frac{\delta}{4}u_t^2+\frac{\lambda}{2}\nu\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right]dQ.$$

В силу неравенства Пуанкаре-Фридрихса справедливо

$$\int\limits_Q u^2 dQ \leq c_\Omega^2\int\limits_Q\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ.$$

С учетом этого окончательно имеем

$$(Lu, e^{-\lambda t}u_t) \geq e^{-\lambda T}\int\limits_Q\left[\frac{\delta}{4}u_t^2+\frac{\lambda\nu}{4}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\frac{\lambda\nu}{4c_\Omega^2}u^2\right]dQ.$$

Отсюда и следует утверждение леммы, если принять $C_1 = e^{-\lambda T}\cdot min\{\frac{\delta}{4}, \frac{\lambda\nu}{4}, \frac{\lambda\nu}{4c_\Omega^2}\}$. Лемма 1.1 доказана.

Заметим, что из леммы 1.1, в частности, следует единственность регулярного решения краевой задачи (1.1)-(1.3).

2. Существование обобщенного решения краевой задачи

Введем следующие обозначения: $\tilde{W}_2^1(Q)$- замыкание множества C_L по норме $\|\ .\|_1$; $W_2^1(Q)$ - подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условиями (1.2) и

$$u|_{\overline{P_0^-}} = 0, \quad u|_{\overline{P_T^+}} = 0. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Функция $u(x,t) \in \tilde{W}_2^1(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1.1)-(1.3), если выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}\left[-ku_t\eta_t+(a-k_t+\lambda k)u_t\eta+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}+cu\eta\right]dQ =$$

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t} f\eta dQ \tag{1.5}$$

для любой функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Теорема 1.1. Пусть $c(x) \geq c_0 > 0$, и при некотором $\lambda > 0$ выполнено условие $2a - k_t + \lambda k \geq \delta > 0$. Тогда при любой функции $f \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение краевой задачи (1.1)-(1.3) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Доказательство. Положим $u_t = \omega$, т.е. $u = \int\limits_0^t \omega(x,\tau)d\tau$. Тогда тождество (1.5) перепишется следующим образом:

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}\Bigg[-k\omega\eta_t + (a - k_t + \lambda k)\omega\eta +$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\int\limits_0^t \omega_{x_j} d\tau\right)\eta_{x_i} + c\left(\int\limits_0^t \omega d\tau\right)\eta\Bigg] dQ =$$

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t} f\eta dQ, \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q). \tag{1.5'}$$

Будем искать функцию $\omega(x,t)$, удовлетворяющую тождеству (1.5′). Введем пространство H_1^*- замыкание $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ по норме

$$\| u \|_{H_1^*}^2 = \int\limits_Q \left[u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_0^t u_{x_i} d\tau\right)^2 + \left(\int\limits_0^t u d\tau\right)^2\right] dQ.$$

H_1^*-гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{H_1^*} = \int\limits_Q \left[uv + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t u_{x_i} d\tau \int\limits_0^t v_{x_i} d\tau + \int\limits_0^t u d\tau \int\limits_0^t v d\tau\right] dQ.$$

Левую часть тождества (1.5′) обозначим через $a(\omega,\eta)$. Справедлива оценка

$$|a(\omega,\eta)| \le c \parallel \omega \parallel_{H_1^*} \cdot \parallel \eta \parallel_1, \ \ \forall \omega \in H_1^*, \ \ \eta \in \hat{W}_2^1(Q).$$

Зафиксируем $\eta \in \hat{W}_2^1(Q)$. Тогда из последней оценки следует, что $a(\omega,\eta)$ есть линейный непрерывный функционал над гильбертовым пространством H_1^*. Следовательно, по теореме Рисса существует элемент $T\eta$ пространства H_1^*, для которого справедливо равенство

$$a(\omega,\eta) = (\omega, T\eta)_{H_1^*}, \ \ \forall \omega \in H_1^*.$$

Таким образом, относительно η получаем линейный оператор T, действующий из $\hat{W}_2^1(Q)$ в H_1^*. Теперь в качестве ω можно взять η, так как $\hat{W}_2^1(Q)$ содержится в H_1^*. Тогда имеем

$$a(\eta,\eta) = (\eta, T\eta)_{H_1^*}. \tag{1.6}$$

С другой стороны,

$$a(\eta,\eta) = \int\limits_Q e^{-\lambda t}\Bigg[-k\eta\eta_t + (a - k_t + \lambda k)\eta^2 +$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\int\limits_0^t \eta_{x_j} d\tau\right)\eta_{x_i} + c\left(\int\limits_0^t \eta d\tau\right)\eta\Bigg] dQ =$$

$$-\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_{P_\tau^-} k\eta^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{P_o^+} k\eta^2 dx + \int\limits_Q e^{-\lambda t}\Bigg[\left(a - \frac{1}{2}k_t + \frac{1}{2}\lambda k\right)\eta^2 +$$

$$\frac{\lambda}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\int\limits_0^t \eta_{x_i} d\tau\right)\left(\int\limits_0^t \eta_{x_j} d\tau\right) + \frac{\lambda}{2}c\left(\int\limits_0^t \eta d\tau\right)^2\Bigg] dQ +$$

$$+\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_{\Omega_T}\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\int\limits_0^T \eta_{x_i} d\tau\right)\left(\int\limits_0^T \eta_{x_j} d\tau\right) + c\left(\int\limits_0^T \eta d\tau\right)^2\right] dx.$$

Выбираем $\lambda > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $a - \frac{1}{2}k_t + \frac{1}{2}\lambda k \geq \frac{\delta}{2}$, и зафиксируем такое λ. Теперь с учетом условий на коэффициенты уравнения (1.1) оцениваем $a(\eta, \eta)$ снизу:

$$a(\eta,\eta) \geq c_2 \int\limits_Q \left[\eta^2 + \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_0^t \eta_{x_i} d\tau\right)^2 + \left(\int\limits_0^t \eta d\tau\right)^2\right] dQ =$$

$$c_2 \parallel \eta \parallel^2_{H_1^*}, \text{ где } c_2 = c_2(\lambda) > 0.$$

Таким образом, из (1.6) получаем

$$c_2 \parallel \eta \parallel^2_{H_1^*} \leq (\eta, T\eta)_{H_1^*} \leq \parallel \eta \parallel_{H_1^*} \parallel T\eta \parallel_{H_1^*},$$

$$\text{т.е.} \quad c_2 \parallel \eta \parallel_{H_1^*} \leq \parallel T\eta \parallel_{H_1^*}, \ \forall \eta \in \hat{W}_2^1(Q). \tag{1.7}$$

Это означает, что T имеет ограниченный обратный оператор T^{-1}, действующий из $T\hat{W}_2^1(Q)$ в $\hat{W}_2^1(Q)$, причем $\parallel T^{-1} \parallel \leq \frac{1}{c_2}$. Если $\xi = T\eta$, то $\eta = T^{-1}\xi \in \hat{W}_2^1(Q)$.

Рассмотрим правую часть тождества (1.5′):

$$l(\xi) = \int\limits_Q e^{-\lambda t} f\eta dQ = \int\limits_Q e^{-\lambda t} f T^{-1}\xi dQ.$$

Оценим ее по модулю сверху, используя оценку (1.7):

$$|l(\xi)| \leq \parallel f \parallel \parallel \eta \parallel \leq \parallel f \parallel \parallel \eta \parallel_{H_1^*} \leq \frac{1}{c_2} \parallel f \parallel \parallel \xi \parallel_{H_1^*}, \ \xi \in T\hat{W}_2^1(Q).$$

Это неравенство означает, что $l(\xi)$- линейный непрерывный функционал относительно ξ над линейным многообразием $T\hat{W}_2^1(Q)$. Продолжаем его по непрерывности на замыкание $\overline{T\hat{W}_2^1(Q)}$, которое является подпространством H_1^*. Если $\overline{T\hat{W}_2^1(Q)} \neq H_1^*$, то продолжаем $l(\xi)$ с сохранением нормы на все гильбертово пространство H_1^* по теореме Хана-Банаха.

Таким образом, $l(\xi)$ есть линейный непрерывный функционал над H_1^*. Тогда в силу теоремы Рисса существует элемент $\omega \in H_1^*$, для которого

$$l(\xi) = (\omega, \xi)_{H_1^*}, \ \forall \xi \in H_1^*.$$

В частности, можно взять $\xi \in TW_2^1(Q)$. Тогда существует $\eta \in W_2^1(Q)$, что $\xi = T\eta$. Имеем $l(\xi) = (\omega, \xi)_{H_1^*} = (\omega, T\eta)_{H_1^*} = a(\omega, \eta)$. Но тогда по определению $l(\xi)$ справедливо равенство

$$a(\omega, \eta) = \int\limits_Q e^{-\lambda t} f\eta dQ, \ \forall \eta \in \acute{W}_2^1(Q),$$

т.е. тождество $(1.5')$.

Положим $u(x,t) = \int\limits_0^t \omega(x,\tau)d\tau$. В силу определения пространства H_1^* $u(x,t) \in \tilde{W}_2^1(Q)$ и $u_t = \omega$. Поэтому из тождества $(1.5')$ имеем

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}\left[-ku_t\eta + (a - k_t + \lambda k)u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + cu\eta\right]dQ =$$

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t} f\eta dQ, \ \forall \eta \in W_2^1(Q),$$

т.е. тождество (1.5). Таким образом, $u(x,t)$ есть обобщенное решение краевой задачи (1.1)-(1.3).

3.Единственность обобщенного решения краевой задачи

Теорема 1.2 Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнено условие

$$2a - 3k_t \geq 2\delta > 0;$$

кроме того, λ – достаточно малое положительное число, и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,0) \geq 0, k(x,T) < 0 \quad \text{или} \quad k(x,0) < 0,\ k(x,T) \geq 0$$

$$\text{или} \quad k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0 \quad \text{или} \quad k(x,0) \geq 0, k(x,T) \geq 0.$$

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(Q)$.

Доказательство В тождестве (1.5) с $f \equiv 0$ возьмем функцию

$$\eta(x,t) = e^{2\lambda t}\psi(t)\int\limits_t^T u(x,\tau)d\tau + e^{\lambda t}\varphi(t)u(x,t),$$

где φ, ψ – неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции, которые в дальнейшем выбираются соответствующим образом.

Поскольку функция $u(x,t)$ принадлежит $\tilde{W}_2^1(Q)$, интегрируя по частям, имеем равенство

$$0 = \int\limits_Q \Big\{ \Big[a - \frac{3}{2}k_t - \frac{3}{2}\lambda k \Big] \psi e^{\lambda t} - \frac{1}{2}ke^{\lambda t}\psi_t + c\varphi +$$

$$\frac{1}{2}(k\varphi_{tt} + k_t\varphi_t) \Big\} u^2\, dQ + \int\limits_Q \Big\{ \Big[-ku_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} \Big] \varphi +$$

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda t}\psi)_t \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int\limits_t^T u_{x_i}\, d\tau \int\limits_t^T u_{x_j}\, d\tau + c\Big(\int\limits_t^T u\, d\tau \Big)^2 \Big] \Big\} dQ +$$

$$\int\limits_Q \Big[e^{\lambda t}\psi(-a+k_t+\lambda k)\Big]_t u\int\limits_t^T u\,d\tau\,dQ+$$

$$\int\limits_Q \Big[(a-k_t)\varphi u-ke^{\lambda t}\psi_t\int\limits_t^T u\,d\tau\Big]u_t\,dQ-$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega k(\varphi_t-e^{\lambda t}\psi)u^2\,dx\Big|^{t=T}+$$

$$\frac{1}{2}\psi(0)\int\limits_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^T u_{x_i}\,d\tau\int\limits_0^T u_{x_j}\,d\tau+c(x)\Big(\int\limits_0^T u\,d\tau\Big)^2\Big]\,dx. \qquad (1.8)$$

Теперь на основании условий теоремы найдется число $\lambda>0$, такое, что

$$a-\frac{3}{2}k_t-\frac{3}{2}\lambda k\geq\frac{\delta}{2}>0,\ \forall(x,t)\in\bar{Q}.$$

1. Пусть имеют место неравенства $k(x,0)\geq 0$, $k(x,T)<0$. Выберем числа T_0, T_1 так, чтобы

$$k(x,t)\leq-\delta_1<0,\ \ t\in[T_0,T];\ \ T_0<T_1<T.$$

Будем считать, что $\varphi(t)=0$, $t\in[0,T_0]$; $\varphi(t)=1$, $t\in[T_1,T]$; $\psi(t)\equiv\mu$, где μ – положительное число. Тогда нетрудно увидеть, что функция $\eta(x,t)$ принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Найдется $\mu>0$ такое, что

$$\frac{\delta}{2}\mu+\frac{1}{2}(k\varphi_{tt}+k_t\varphi_t)\geq\gamma>0.$$

Используя неравенство Коши, из (1.8) получим оценку

$$0\geq(\gamma-\varepsilon_1)\int\limits_Q u^2dQ+\int\limits_Q[c(x)-K_{\varepsilon_2}]\varphi u^2dQ+\int\limits_Q\big[(\delta_1-\varepsilon_2)u_t^2+$$

$$\nu \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2]\varphi dQ + \mu \int\limits_Q \Big[\frac{1}{2}\lambda c(x) - K_{\varepsilon_1}\mu\Big]\Big(\int\limits_t^T u\,d\tau\Big)^2 dQ -$$

$$K_1\mu \int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx, \tag{1.9}$$

где ε_i, K_{ε_i}, K_1 – положительные константы. В силу теоремы вложений имеем неравенство

$$\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx \le \varepsilon_3 \int\limits_{\Omega\times(T_1,T)} \Big(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\Big)\,dQ + K_{\varepsilon_3} \int\limits_{\Omega\times(T_1,T)} u^2\,dQ. \tag{1.10}$$

Выбирая $\varepsilon_i > 0$ достаточно малыми и затем используя условия теоремы и (1.10), из соотношения (1.9) получаем: $u = 0$ в Q.

2. При $k(x,0) < 0$, $k(x,T) \ge 0$ возьмем числа t_0, t_1 такие, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0,\ \ t \in [0,t_0];\ \ 0 < t_1 < t_0 < T.$$

Положим

$$\varphi(t) = 0,\ \ t \in [t_0,T];\ \ \varphi(t) = 1,\ \ t \in [0,t_1];$$

$$\psi(t) = \mu,\ \ t \in [t_1,T];\ \ \psi_t(t) \ge 0;\ \ \psi_t(0) \ge \psi_0 > 0;\ \ \psi(0) = 0.$$

По построению функция $\eta(x,t)$ принадлежит $\mathring{W}_2^1(Q)$. Снова существует $\mu > 0$ такое, что

$$\frac{\delta}{2}\psi + \frac{\delta_1}{2}\psi_t + \frac{1}{2}(k\varphi_{tt} + k_t\varphi_t) \ge \gamma > 0.$$

В силу (1.5) будем иметь

$$0 \ge (\gamma - \varepsilon_1)\int\limits_Q u^2 dQ + \int\limits_Q [c(x) - K_{\varepsilon_2}]\varphi u^2 dQ +$$

$$\int\limits_Q \Big\{[\delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4\psi_t^2]u_t^2 + \nu\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\Big\}\varphi\,dQ +$$

$$\int\limits_Q \left[c(x)K_2 - (K_{\varepsilon_1} + K_{\varepsilon_4})\right]\Big(\int\limits_t^T u\,d\tau\Big)^2 dQ, \quad K_2 > 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что $u = 0$ в $\bar{Q}$.

3. При $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$ будем считать, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0, \ \ t \in [0,t_0] \cup [T_0,T].$$

В качестве $\psi(t)$ рассмотрим функцию $\psi(t)$ из пункта 2 и положим

$$\varphi(t) = 1, \ \ t \in [0,t_1] \cup [T_1,T]; \ \ \varphi(t) = 0, \ \ t \in [t_0,T_0].$$

Из (1.5) следует неравенство

$$0 \ge (\gamma - 1)\int\limits_Q u^2 dQ + \int\limits_Q [c(x) - K_{\varepsilon_2}]\varphi u^2 dQ +$$

$$\int\limits_Q \Big\{[\delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4\psi_t^2]u_t^2 + \nu\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\Big\}\varphi\,dQ +$$

$$\int\limits_Q \left[c(x)K_2 - (K_{\varepsilon_1} + K_{\varepsilon_4})\right]\Big(\int\limits_t^T u\,d\tau\Big)^2 dQ - K_3\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx,$$

из которого на основании (1.10) получим $u = 0$ в области Q.

4. Пусть имеют место $k(x,0) \ge 0$, $k(x,T) \ge 0$. В данном случае достаточно рассмотреть функции $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 1$. Тогда из (1.8) получаем

$$0 \ge \Big(\frac{\delta}{2} - \varepsilon_1\Big)\int\limits_Q u^2 dQ + \int\limits_Q \Big[\frac{\lambda}{2}c(x) - K_{\varepsilon_1}\Big]\Big(\int\limits_t^T u\,d\tau\Big)^2 dQ.$$

Отсюда заключаем, что $u = 0$ в Q. Теорема доказана.

4. О гладкой разрешимости краевой задачи

Теорема 1.3. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия

$$2a \pm k_t \geq \delta > 0; \qquad (k_{13})$$

$$k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0.$$

Тогда для любых функций $f \in L_2(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, существует решение уравнения (1.1) $u(x,t)$ из $W_2^1(Q)$ удовлетворяющее краевым условиям (1.2), (1.3) и такое, что

$$u \in W_2^2(Q_{\eta,T-\eta}), \;\; Q_{\eta,T-\eta} = \Omega \times (\eta, T-\eta), \;\; 0 < \eta < T.$$

Доказательство. Для $0 < \varepsilon \leq 1$ положим

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon D_t^3 u + Lu, \;\; D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - фундаментальная система в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ ищем в виде

$$\omega(x,t) \equiv u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x)$$

из соотношений

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \;\; l = \overline{1,N}, \qquad (1.11)$$

$$C_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \;\; D_t C_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \;\; D_t C_l^{N,\varepsilon}(T) = 0. \qquad (1.12)$$

Разрешимость задачи (1.11), (1.12) следует из наших предположений. Действительно, умножая каждое из уравнений (1.11) на $e^{-\lambda t} D_t C_l^{N,\varepsilon}$ и складывая по l от 1 до N, получим

$$(L_\varepsilon \omega, e^{-\lambda t}\omega_t)_0 = (f, e^{-\lambda t}\omega_t)_0.$$

Полученное равенство проинтегрируем по t от 0 до T, затем проведем интегрирование по частям с учетом условий (1.12). Выберем число $\lambda > 0$ так, чтобы $2a - k_t + \lambda k \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Это дает априорную оценку

$$\varepsilon \parallel \omega_{tt} \parallel^2 + \parallel \omega \parallel_1^2 \leq C_6 \parallel f \parallel^2 \tag{1.13}$$

с постоянной C_6, не зависящей от N, ε. Поэтому краевая задача (1.11), (1.12) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений однозначно разрешима при любой f из $L_2(Q)$, и для приближенных решений ω справедлива оценка (1.13).

1. Выберем числа t_0, T_0, T_1 так, чтобы

$$-k(x,t) \geq \delta_1 > 0, \ \ t \in [0, t_0] \cup [T_0, T], \ \ 0 < t_0 < T_0 < T_1 < T.$$

Возьмем неотрицательную функцию $\xi(t) \in C^\infty[0, T]$ такую, что

$$\xi(t) = 0, \ \ t \in [0, T_0]; \ \ \xi(t) = 1, \ \ t \in [T_1, T].$$

Умножим (1.11) на $-\xi(t) D_t^2 C_l^{N,\varepsilon}$ и просуммируем по l от 1 до N, тогда получим

$$-(L_\varepsilon \omega, \xi \omega_{tt})_0 = -(f, \xi \omega_{tt})_0.$$

Проинтегрируем последнее равенство по t от 0 до T с учетом условий (1.12). Это дает соотношение

$$-(f, \xi\omega_{tt}) = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{t=T} \xi \omega_{tt}^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_Q \xi_t \omega_{tt}^2 dQ -$$

$$\int\limits_Q \xi k \omega_{tt}^2 dQ + \int\limits_Q \xi \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{tx_i} \omega_{tx_j} + c\omega_t^2 \right] dQ -$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_Q \xi_{tt} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} dQ + \frac{1}{2} \int\limits_Q (a\xi)_t \omega_t^2 dQ - \frac{1}{2} \int\limits_Q \xi_{tt} c \omega^2 dQ.$$

В силу (1.13) отсюда следует неравенство

$$\int_{T_1}^{T}\int_{\Omega}\left[\omega_{tt}^2+\omega_t^2+\sum_{i=1}^{n}\omega_{tx_i}^2\right]dxdt\leq C_7\parallel f\parallel^2,\ \ C_7>0. \tag{1.14}$$

2. Рассмотрим положительные числа r, t_1 такие, что

$$0<t_1<t_0,\ \ 0<t_1-2r,\ \ T_1+2r<T.$$

Положим $I=[t_1-r,t_1]$, $J=[T_1,T_1+r]$, $V=[t_1,T_1]$.

Построим неотрицательные функции ξ, $\eta\in C_0^\infty(0,T)$, удовлетворяющие условиям:

$$\xi=0,\ \ t\in[t_0,T_0]\cup[0,t_1-2r]\cup[T_1+2r,T];$$

$$\xi=1,\ \ t\in I\cup J;$$

$$\eta=0,\ \ t\in[0,t_1-r]\cup[T_1+r,T];$$

$$\eta=e^{-\lambda t},\ \ t\in V.$$

Для приближенных решений $\omega(x,t)$ справедливы неравенства:

$$\int_{I\cup J}\int_{\Omega}\left[\omega_{tt}^2+\omega_t^2+\sum_{i=1}^{n}\omega_{tx_i}\right]dxdt\leq C_8\parallel f\parallel^2, \tag{1.15}$$

$$\varepsilon\int_V\int_\Omega(D_t^3\omega)^2dxdt+\int_V\int_\Omega\left[\omega_{tt}^2+\omega_t^2+\sum_{i=1}^{n}\omega_{tx_i}^2\right]dxdt\leq$$
$$C_9(\parallel f\parallel^2+\parallel f_t\parallel^2). \tag{1.16}$$

Неравенство (1.15) выводится из (1.11), (1.12) аналогично оценке (1.14), после умножения (1.11) на $-\xi(t)D_t^2C_l^{N,\varepsilon}$. Теперь, умножая каждое из равенств (1.11) на $-\eta(t)D_t^3C_l^{N,\varepsilon}$ и суммируя по l от 1 до N, придем к равенству

$$-(L_\varepsilon\omega,\eta D_t^3\omega)_0=-(f,\eta D_t^3\omega)_0,$$

из которого после интегрирования по t от 0 до T следует

$$(-f, \eta D_t^3\omega) = \varepsilon \int\limits_0^T \eta(t) \int\limits_\Omega (D_t^3\omega)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{V\cup I\cup J} dt \int\limits_\Omega [(2a+$$

$$k_t)\eta + k\eta_t]\omega_{tt}^2 dx - \frac{3}{2} \int\limits_{V\cup I\cup J} \eta_t dt \int\limits_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{tx_i}\omega_{tx_j} + c\omega_t^2\right] dx+$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{V\cup I\cup J} D_t^3\eta dt \int\limits_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j} + c\omega^2\right] dx - \frac{1}{2} \int\limits_{V\cup I\cup J} \int\limits_\Omega (a\eta)_{tt}\omega_t^2 dxdt. \tag{1.17}$$

Выбирая достаточно малое $\lambda > 0$ в (1.17), с учетом условий теоремы и неравенств (1.13), (1.15) получаем справедливость неравенства (1.16).

3. Для любого $0 < \eta < T$ найдутся числа t_1, T_1, удовлетворяющие вышеуказанным свойствам и такие, что $0 < t_1 < \eta$, $T - \eta < T_1$. Из неравенства (1.16) следует оценка

$$\int\limits_\eta^{T-\eta} \int\limits_\Omega \left[\omega_{tt}^2 + \omega_t^2 + \sum_{i=1}^n \omega_{tx_i}^2\right] dxdt \le C(\| f \|^2 + \| f_t \|^2). \tag{1.18}$$

Умножим каждое из соотношений (1.11) на функцию $d_l(t)$ из $C_0^\infty(0, T)$, полученные равенства просуммируем по l от 0 до N_1, $N_1 < N$, и проинтегрируем по t от 0 до T. Это дает тождество

$$(u^{N,\varepsilon}, L_\varepsilon^* v) = (f, v), \quad v = \sum_{l=1}^{N_1} d_l(t)\varphi_l(x).$$

В силу априорных оценок (1.13), (1.14), (1.18) легко завершается доказательство теоремы переходом к пределу при $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве. Теорема 1.3 доказана полностью.

Следствие 1.1. Пусть выполнены все условия теоремы 1.3. Тогда краевая задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение $u(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность такого решения непосредственно следует из леммы 1.1.

Теорема 1.3 гарантирует существование решения $u(x,t)$ из $W_2^2(Q_{\eta,T-\eta})$. Возьмем число η достаточно малым, чтобы $\eta < t_0$, $T_0 < T-\eta$. Уравнение (1.1) в области $\Omega\times[0,t_0]\cup\Omega\times[T_0,T]$ принадлежит эллиптическому типу, т.к. $k(x,t) < 0$ в этой области. Поэтому $u(x,t)\in W_2^2(\Omega\times(0,t_0)\cup\Omega\times(T_0,T))$. Таким образом, $u(x,t)\in W_2^2(Q)$.

ГЛАВА II

Первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка

1. Постановка первой краевой задачи и априорная оценка

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu = k(x,t)u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j}) + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t). \quad (2.1)$$

Предположим, что выполнены условия (k_{11}). В дальнейшем будем использовать обозначения, которые были введены в первой главе.

Краевая задача. Найти решение уравнения (2.1) в области Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2.2)$$

$$u|_{\overline{P_0^+}} = 0, \quad u|_{t=T} = 0, \quad u_t|_{\overline{P_T^-}} = 0. \quad (2.3)$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.3), а $\tilde{W}_2^1(Q)$ - замыкание C_L по норме $\| u \|_1$. Через $W_2^1(Q)$ обозначим подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условием (2.2) и

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\overline{P_T^+}} = 0. \quad (2.4)$$

Лемма 2.1. Пусть коэффициент $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю и

$$k(x,0) > 0, \quad 2a - k_t \geq \delta > 0. \quad (k_{21})$$

Тогда существуют функции $\phi(t), \psi(t) \in C^\infty[0,T]$, такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \phi u_t + \psi u) \geq C \| u \|_1^2, \quad C = const > 0.$$

Доказательство. Найдется положительное число $t_0 < T$, такое, что

$$k(x,t) \geq \delta_0 > 0, \quad t \in [0, t_0].$$

Выберем функции $\phi(t)$, $\psi(t)\in C^\infty[0,T]$ такие, что

$$\phi(0)=0; \quad \phi(t)=\mu, \quad t\in[t_0,T]; \quad \phi'(t)\geq 0;$$

$$\psi(t)=-\frac{3}{2}\phi_t-1; \quad \mu=const>0.$$

После интегрирования по частям получаем соотношение

$$(Lu,\phi u_t+\psi u)=\frac{\phi(T)}{2}\int\limits_{P_T^+}ku_t^2dx+\int\limits_Q\Big[\frac{1}{2}(2a-k_t)\phi+$$

$$k(-\frac{1}{2}\phi_t-\psi)\Big]u_t^2dQ+\int\limits_Q(-\psi+\frac{1}{2}\phi_t)\Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}-$$

$$c(x)u^2\Big]dQ+\frac{1}{2}\int\limits_Q\big[(k\psi)_{tt}-(a\psi)_t\big]u^2dQ \qquad (2.5)$$

для любой функции $u(x,t)\in C_L$. Выбирая число $\mu>0$ достаточно большим, из (2.5) в силу условий леммы получаем ее утверждение.

2. Единственность обобщенного решения первой краевой задачи

Для функций $u \in C_L$, $\eta \in \hat{W}_2^1(Q)$ имеем билинейную форму

$$I(u,\eta) \equiv (Lu,\eta) = \int\limits_Q \Big[-ku_t\eta_t + (a-k_t)u_t\eta - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + cu\eta\Big]dQ.$$

Определение 2.1. Функция $u(x,t) \in \tilde{W}_2^1(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи (2.1)-(2.3), если выполнено интегральное тождество

$$I(u,\eta) = (f,\eta), \quad \forall \eta \in \hat{W}_2^1(Q). \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда уравнение (2.1) является эллиптико - параболическим.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия

$$k(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}; \quad k(x,0) > 0; \quad -c + \frac{1}{2}(a_t - k_{tt}) \ge \delta > 0.$$

Тогда краевая задача (2.1)-(2.3) может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(Q)$.

Доказательство. В тождестве с $f \equiv 0$ положим $\eta = u$. Интегрируя по частям полученное равенство, имеем

$$0 = \int\limits_Q \Big[ku_t^2 + \frac{1}{2}(a_t - k_{tt})u^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} - cu^2\Big]dQ.$$

В силу условий теоремы отсюда получим

$$0 \ge \delta \int\limits_Q u^2 dQ + \nu \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ,$$

откуда следует, что $u = 0$ в области Q. Теорема доказана.

<u>Теорема 2.2.</u> Пусть функция $c(x) < 0$ достаточно велика по модулю и $a - \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0$; кроме того, выполнено либо $k(x,T) \leq 0$, либо $k(x,T) > 0$. Тогда краевая задача (2.1) - (2.3) может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(Q)$.

<u>Доказательство.</u> В качестве пробной функции рассмотрим следующую функцию

$$\eta(x,t) = \psi(t) \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u(x,\tau) d\tau + \varphi(t) u(x,t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t) \geq 0$ - соответствующим образом подобранные гладкие функции.

Так как $u(x,t) \in \tilde{W}_2^1(Q)$, то после интегрирования по частям имеем

$$0 = \int\limits_Q \Big\{ \Big[a - \frac{3}{2}k_t - \lambda k \Big] e^{2\lambda t} \psi - \frac{1}{2} k e^{2\lambda t} \psi_t +$$

$$\frac{1}{2}[(a - k_t)\varphi - k\varphi_t]_t - c\varphi \Big\} u^2 dQ +$$

$$\int\limits_Q k\varphi u_t^2 dQ + \int\limits_Q \big[(a - k_t)\psi - k\psi_t\big]_t u \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u d\tau dQ +$$

$$\int\limits_Q e^{-2\lambda t} \Big(-\frac{1}{2}\psi_t + \lambda\psi \Big) \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u_{x_i} d\tau \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u_{x_j} d\tau -$$

$$c\Big(\int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u d\tau \Big)^2 \Big] dQ +$$

$$\int\limits_Q \varphi \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dQ - \frac{1}{2}[\psi(0) + \varphi_t(0)] \int\limits_{P_0^-} k u^2 dx +$$

$$\frac{1}{2}\varphi(0)\int\limits_{P_0^-}(a-k_t)u^2dx+\frac{1}{2}e^{-2\lambda T}\psi(T)\times$$

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\int\limits_0^T e^{2\lambda\tau}u_{x_i}d\tau\int\limits_0^T e^{2\lambda\tau}u_{x_j}d\tau-c\Big(\int\limits_0^T e^{2\lambda\tau}ud\tau\Big)^2\Big]dx. \quad (2.7)$$

Теперь на основании условий теоремы можно выбрать $\lambda>0$ настолько малым, чтобы

$$a-\frac{3}{2}k_t-\lambda k\geq\frac{\delta}{2}>0,\quad\forall(x,t)\in\bar{Q}.$$

1. Пусть выполнено условие $k(x,T)>0$. Выберем числа T_0, T_1, T_2 так, чтобы

$$k(x,t)\geq\delta_1>0,\quad t\in[T_0,T];\quad 0<T_0<T_1<T_2<T.$$

Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ таковы, что

$$\varphi(t)=0,\quad t\in[0,T_0];\quad\varphi(t)=1,\quad t\in[T_1,T];$$

$$\psi(t)=\mu,\quad t\in[0,T_1];\quad\psi(t)=0,\quad t\in[T_2,T];$$

$$\psi_t\leq 0;\quad\mu=const>0.$$

Нетрудно проверить, что тогда функция $\eta(x,t)$ будет принадлежать $\hat{W}_2^1(Q)$. Найдется $\mu>0$ такое, что

$$\frac{\delta}{2}\mu+\frac{1}{2}[(a-k_t)\varphi-k\varphi_t]_t-c\varphi\geq\gamma>0$$

для $\forall t\in[0,T_1]$. С другой стороны, в силу предположения на коэффициент $c(x)$ имеем

$$\frac{\delta}{2}\psi+\frac{1}{2}(a-k_t)_t-\frac{1}{2}ke^{2\lambda t}\psi_t-c\geq\gamma>0,\quad t\in[T_1,T].$$

С учетом этого, используя неравенство Коши, из (2.7) получим оценку

$$0\geq(\gamma-\varepsilon_1)\int\limits_Q u^2dQ+\int\limits_Q\Big[\delta_1u_t^2+\nu\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\Big]\varphi dQ+$$

$$\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_\Omega \Big[-e^{-2\lambda t}\Big(-\frac{1}{2}\psi_t + \lambda\psi\Big) c - K_{\varepsilon_1}\Big] \Big(\int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u d\tau \Big)^2 dx, \qquad (2.8)$$

где ε_1, K_{ε_1} - положительные постоянные. Выбирая $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малым и затем используя условия теоремы, из соотношения (2.8) получаем: $u = 0$ в области Q.

2. В случае $k(x,T) \leq 0$ достаточно рассмотреть функции $\varphi(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv 1$. Тогда из (2.7) получаем

$$0 \geq \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\Big) \int\limits_Q u^2 dQ - e^{-2\lambda T} \int\limits_Q [\lambda c(x) + K_{\varepsilon_1}] \Big(\int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} u d\tau \Big)^2 dQ.$$

Отсюда следует, что $u = 0$ в Q. Теорема доказана.

3. Обобщенная разрешимость первой краевой задачи

В области Q рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon D_t^4 u + Lu = f, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.9}$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = u|_{t=T} = u_t|_{t=0} = u_t|_{t=T} = 0. \tag{2.10}$$

Для любой функции $f \in L_2(Q)$ через $u^\varepsilon(x,t)$ обозначим некоторое решение краевой задачи (2.9),(2.10) из $W_2^{2,4}(Q)$.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\varepsilon \|u_{tt}^\varepsilon\|^2 + \|u^\varepsilon\|_1^2 \le C\|f\|^2, \tag{2.11}$$

где $C = const > 0$ не зависит от ε.

Доказательство. Рассмотрим функции ϕ, ψ, которые построены при доказательстве леммы 2.1. Имеем

$$(f, \phi v_t + \psi v) = \frac{\varepsilon}{2}\phi(T)\int_\Omega v_{tt}^2 dx|^{t=T} - \varepsilon\int_Q (\frac{3}{2}\phi_t + \psi) v_{tt}^2 dQ +$$

$$\varepsilon\int_Q (\frac{1}{2}\phi_t + 2\psi)_{tt} v_t^2 dQ - \frac{\varepsilon}{2}\int_Q D_t^4 \psi v^2 dQ + (Lv, \phi v_t + \psi v),$$

где $v(x,t) = u^\varepsilon(x,t)$. Отсюда на основании леммы 2.1 при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ получаем априорную оценку (2.11). Лемма доказана.

В силу фредгольмовой разрешимости краевой задачи (2.9), (2.10) [10, 19] из леммы 2.2 следует, что она однозначно разрешима в пространстве $W_2^{2,4}(Q)$.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1 и $k(x,T) > 0$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2.1)-(2.3) из $W_2^1(Q)$.

Доказательство. Умножим уравнение (2.9) на функцию $\eta(x,t) \in C_0^\infty(Q)$ и проинтегрируем по области Q:

$$(f, \eta) = -\varepsilon\int_Q u_{tt}^\varepsilon \eta_{tt} dQ + I(u^\varepsilon, \eta). \tag{2.12}$$

В силу оценки (2.11) функции $\sqrt{\varepsilon}u_{tt}^{\varepsilon}$ ограничены в $L_2(Q)$, и существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $\{u^{\varepsilon_k}\}$ слабо сходится к некоторой функции $u \in W_2^1(Q)$ при $\varepsilon_k \to 0$.

Переходя к пределу в (2.12) при $\varepsilon_k \to 0$, получим

$$I(u,\eta) = (f,\eta), \quad \forall \eta \in C_0^\infty(Q).$$

А поскольку $C_0^\infty(Q)$ плотно в $\mathring{W}_2^1(Q)$, то отсюда следует, что $u(x,t)$ - обобщенное решение краевой задачи (2.1)-(2.3). Теорема доказана.

4. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи

Теорема 2.4. Пусть коэффициент $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю и

$$k(x,0) > 0, \quad k(x,T) > 0, \quad 2a \pm k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, существует обобщенное решение $u(x,t) \in W_2^1(Q)$ краевой задачи (2.1)-(2.3), такое, что

$$u \in W_2^2(Q_\eta), \quad Q_\eta = \Omega \times (\eta, T-\eta), \quad 0 < \eta < T.$$

Доказательство. Рассмотрим числа t_0, T_0, t_1, T_1, r, множества I, J, V и функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, которые были введены при доказательстве теоремы 1.3. При этом имеют место соотношения

$$k(x,t) \geq \delta_0 > 0, \quad t \in [0,t_0] \cup [T_0,T],$$

$$\eta(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in V.$$

Покажем, что справедливы неравенства

$$\varepsilon \int\limits_{I\cup J}\int\limits_{\Omega} (D_t^3\omega)^2\,dxdt + \int\limits_{I\cup J}\int\limits_{\Omega} [\omega_{tt}^2 + \omega_t^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_{tx_i}^2]\,dxdt \leq C\|f\|^2, \tag{2.13}$$

$$\varepsilon\int\limits_V\int\limits_\Omega (D_t^3\omega)^2 dxdt + \int\limits_V\int\limits_\Omega [\omega_{tt}^2 + \omega_t^2 + \sum_{i=1}^n \omega_{tx_i}^2] dxdt \le C(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \tag{2.14}$$

где $\omega = u^\varepsilon(x,t)$ - решение задачи (2.9)-(2.10).

Интегрированием по частям получим

$$(f,\xi\omega_{tt}) = \varepsilon\int\limits_{t_1-2r}^{T_1+2r}\xi\int\limits_\Omega (D_t^3\omega)dxdt + \int\limits_{t_1-2r}^{T_1+2r}\xi dt\int\limits_\Omega [k\omega_{tt}^2 +$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{tx_i}\omega_{tx_j} - c\omega_t^2]dx + \int\limits_{t_1-2r}^{T_1+2r} dt\int\limits_\Omega [-\frac{\varepsilon}{2}\xi_{tt}\omega_{tt}^2 -$$

$$\frac{1}{2}\xi_{tt}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j} - (a\xi)_t\omega_t^2]dx.$$

Отсюда в силу оценки (2.11) следует неравенство (2.13). Далее имеем равенство

$$-(f,\eta D_t^3\omega - \frac{3}{2}\eta_t D_t^2\omega) = \varepsilon\int\limits_{t_1-r}^{T_1+r}\eta_t dt\int\limits_\Omega (D_t^3\omega)^2 dx -$$

$$\frac{3}{4}\varepsilon\int\limits_{t_1+r}^{T_1+r}(D_t^3\eta)dt\int\limits_\Omega \omega_{tt}^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1-r}^{T_1+r}dt\int\limits_\Omega [(2a+k_t)\eta + 4k\eta_t]\omega_{tt}^2 dx +$$

$$\frac{3}{2}\int\limits_{t_1+r}^{T_1+r}\eta_t dt\int\limits_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{tx_i}\omega_{tx_j} - c\omega_t^2]dx +$$

$$\int\limits_{t_1+r}^{T_1+r}(\frac{3}{4}\eta_{tt} - \frac{1}{2}D_t^3\eta)\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j}dxdt - \frac{3}{2}\int\limits_{t_1+r}^{T_1+r}\int\limits_\Omega [2(a\eta)_{tt} + (a\eta_t)_t +$$

$$c\eta_t]\omega_t^2 dx dt + \dots .$$

Благодаря неравенствам (2.11), (2.13) из последнего равенства получаем оценку (2.14), если выбрать $\lambda > 0$ достаточно малым.

Для любого $0 < \eta < \frac{T}{2}$ найдутся числа t_1, T_1, удовлетворяющие вышеуказанным свойствам и такие, что $0 < t_1 < \eta$, $T - \eta < T_1$. Предельный элемент последовательности $\{u^\varepsilon\}$ обозначим снова через $u(x, t)$.

Возьмем функцию $\zeta(t) \in C_0^\infty[0, T]$, такую, что $\zeta(t) = 0$, $t \in [0, t_1] \cup [T_1, T]$; $\zeta(t) = 1$, $t \in [\eta, T - \eta]$.

Тогда для функции $v(x, t) = \zeta(t)u(x, t)$ имеем уравнение

$$v_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)v_{x_j}) + c(x)v = \Phi,$$

где правая часть

$$\Phi = \zeta f + v_{tt} + (\zeta_t k + \zeta k_t - a)u_t$$

на основании (2.14) принадлежит $L_2(Q)$. Тогда из работ [10, 19] следует, что $v \in W_2^2(Q)$ или $u \in W_2^2(Q_\eta)$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Тогда для любой функции $f \in W_2^{0,1}(Q)$ существует единственное решение $u(x, t)$ краевой задачи (2.1)-(2.3) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность регулярного решения краевой задачи (2.1)-(2.3) следует из леммы 2.1. Обобщенное решение данной краевой задачи, гарантированное теоремой 2.4, принадлежит пространству $W_2^2(Q_\eta)$ при $0 < \eta < \frac{T}{2}$. Для достаточно малых η уравнение (2.1) в $Q \setminus Q_{2\eta}$ является эллиптическим. Следовательно, $u(x, t) \in W_2^2(Q \setminus Q_\eta)$. Таким образом, $u(x, t)$ является искомым регулярным решением первой краевой задачи (2.1)-(2.3).

ГЛАВА III
Первая краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

1. Постановка первой краевой задачи и априорная оценка

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)u_{x_j}) + c(x,t)u = f(x,t). \qquad (3.1)$$

Предполагается, что коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям (k_{11}). Положим

$$S_0^{\pm} = \{(x,0): \quad k(x,0)^{>0}_{<0}\}, \quad S_T^{\pm} = \{(x,T): \quad k(x,T)^{>0}_{<0}\}, x \in \Omega$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (3.1) в области Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \qquad (3.2)$$

$$u|_{S_0^+} = 0, u|_{S_T^-} = 0. \qquad (3.3)$$

При этом сопряженные краевые условия имеют вид

$$v|_{S_T} = 0, \qquad (3.2^*)$$

$$v|_{S_0^-} = 0, v|_{S_T^+} = 0. \qquad (3.3^*)$$

Пусть L^*-оператор, сопряженный по Лагранжу к L. Через $C_L(C_{L^*})$ обозначим класс гладких в $\bar{Q}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (3.2), (3.3), ((3.2*), (3.3*)). Наконец, $\hat{W}_2^1(Q)$ - подпространство, полученное замыканием C_{L^*} по норме пространства $W_2^1(Q)$.

Лемма 3.1 Пусть выполнено условие

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0. \qquad (l_{11})$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ имеет место оценка

$$\Big(\int\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u^2\Big]dQ\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_1\|Lu\|, \quad C_1 > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (Lu,u) для $u \in C_L$. После интегрирования по частям с учетом однородных граничных условий получим

$$(Lu,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_T^+} ku^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{S_0^-} ku^2dx + \int\limits_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + (c - \frac{1}{2}k_t)u^2\Big)dQ,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Из леммы 1.1, в частности, следует, что при выполнении условий леммы регулярное решение краевой задачи (3.1)-(3.3) единственно.

2. Слабые и обобщенные решения первой краевой задачи

Для любых $u \in C_L$, $v \in C_{L^*}$ имеет место равенство $(Lu,v) = (u, L^*v)$, где

$$L^*v = -kv_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}v_{x_j}) + (c - k_t)v.$$

Определение 3.1. Слабым решением краевой задачи (3.1)-(3.3) назовем функцию $u \in L_2(Q)$, такую, что интегральное тождество

$$(u, L^*v) = (f,v), \quad f \in L_2(Q),$$

выполняется для любой функции $v \in C_{L^*}$.

Определение 3.2. Функцию $u \in L_2(Q)$ будем называть сильным решением задачи (3.1)-(3.3), если существует последовательность функций $u_k \in C_L$, таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = \lim_{k\to\infty} \|Lu_k - f\| = 0, \quad f \in L_2(Q).$$

Определение 3.3. Функция $u(x,t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ называется обобщенным решением задачи (3.1)-(3.3), если выполнено тождество

$$a(u,v) \equiv -\int_Q [kuv_t + k_t uv]dQ + \int_Q [\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + cuv]dQ = \int_Q fvdQ,$$

$$f \in W_2^{-1,0}(Q), \tag{3.4}$$

для любой функции v из $\hat{W}_2^1(Q)$.

Теорема 3.1. Пусть имеет место условие $c - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует слабое решение $u \in L_2(Q)$ краевой задачи (1.1)-(1.3).

Доказательство. После интегрирования по частям получим, как и выше,

$$(L^* v, v) = -\frac{1}{2}\int_{S_T^-} kv^2 dx + \frac{1}{2}\int_{S_0^+} kv^2 dx$$

$$+ \int_Q \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + (c - \frac{1}{2}k_t)v^2\Big] dQ, \quad \forall v \in C_L^*.$$

Отсюда имеем

$$(L^* v, v) \geq C\int_Q \big[v^2 + \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2\big] dQ \geq C\|v\|^2. \tag{3.5}$$

Далее, $\|L^* v\| \geq C\|v\|, \quad \forall v \in C_{L^*}$. Разрешимость функционального уравнения $(u, L^* v) = (f, v), \quad \forall v \in C_{L^*}$, доказывается на основании оценки (3.5) по стандартной схеме [2].

В дальнейшем нам понадобится известная лемма:

Лемма 3.2. (М.И.Вишик). Пусть A есть оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и с ограниченным обратным в области своих значений $R(A)$. Тогда область значений $R(A^*)$ сопряженного к нему оператора совпадает со всем H.

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие $c - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{-1,0}(Q)$ существует обобщенное решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}$ краевой задачи (3.1)-(3.3).

Доказательство. При фиксированном v из $\hat{W}_2^1(Q)$ интеграл $a(u,v)$ определяет линейный ограниченный функционал над u в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, который в силу теоремы Рисса записывается в виде

$$a(u,v) = (u, Av)_{1,0}, \quad Av \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q).$$

Оператор A, определяемый этим тождеством, удовлетворяет условиям леммы 3.2.

Действительно, $\hat{W}_2^1(Q)$ является областью определения оператора A и вложено в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ плотным образом. С другой стороны, путем интегрирования по частям получаем равенство

$$(v, Av)_{1,0} = a(v,v) = -\frac{1}{2}\int\limits_{S_T^-} kv^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{S_0^+} kv^2 dx$$

$$+ \int\limits_Q \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + (c - \frac{1}{2}k_t)v^2\Big] dQ$$

для всех функций v из $\hat{W}_2^1(Q)$. Отсюда следует

$$(v, Av)_{1,0} \geq C_2 \|v\|_{1,0}^2, \quad \forall v \in \hat{W}_2^1(Q).$$

где $C_2 > 0$, а значит,

$$\|Av\|_{1,0} \geq C_2 \|v\|_{1,0}, \qquad \forall v \in \hat{W}_2^1(Q).$$

Таким образом, A^{-1} существует и ограничен. Нетрудно показать, что интегральное тождество (3.4) эквивалентно операторному уравнению

$$A^* u = F, \quad F \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q), \tag{3.6}$$

где A^*-сопряженный к A оператор. Применяя к оператору A лемму 3.2, получаем, что область $R(A^*)$ значений совпадает с $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. Следовательно, уравнение (3.6) всегда имеет решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. Теорема доказана.

3. О гладкой разрешимости первой краевой задачи

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия

$$c - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, k(x,0) < 0, k(x,T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{0,1}(Q)$ существует обобщенное решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ краевой задачи (3.1)-(3.3), такое, что

$$u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_\eta), \quad Q_\eta = \Omega \times (\eta, T-\eta), \quad 0 < \eta < T.$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon v = -\varepsilon v_{tt} + Lv$. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$-фундаментальная система в $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$.

Приближенные решения

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv \omega = \sum_{k=1}^{N} C_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x)$$

будем искать как решение краевой задачи

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{3.7}$$

$$C_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad C_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{1,N}, \tag{3.8}$$

Однозначная разрешимость задачи (3.7), (3.8) следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Умножим (3.7) на $C_k^{N,\varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по l от 1 до N, тогда имеем

$$(f, \omega)_0 = (L_\varepsilon \omega, \omega)_0,$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до T, получим соотношение

$$(f, \omega) = \varepsilon\|\omega_t\|^2 + (L\omega, \omega).$$

Из последнего равенства в силу леммы 3.1 следует априорная оценка

$$\varepsilon\|\omega_t\|^2 + \|\omega\|_{1,0}^2 \le C_3\|f\|^2, \quad C_3 > 0. \tag{3.9}$$

Выберем числа t_1, t_0, T_0, T_1, r так, чтобы

$$0 < t_1 < t_0 < T_0 < T_1 < T, \quad 0 < t_1 - 4r, \quad T_1 + 4r < T,$$

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0, \quad t \in [0, t_0]; \quad k(x,t) \ge \delta_2 > 0, \quad t \in [T_0, T].$$

Рассмотрим множества I, J, V, введенные при доказательстве теоремы 1.3. Найдутся функции ξ, η из $C_0^\infty(0,T)$, такие, что

$$\xi(t) = 0, \quad t \in [0, t_1 - 2r] \cup [T_1 + 2r, T] \cup [t_0, T_0];$$

$$\xi(t) = -1, t \in I; \quad \xi(t) = 1, t \in J;$$

$$\xi(t) \le 0, t \in [0, t_0]; \quad \xi(t) \ge 0, t \in [t_0, T];$$

$$\eta(t) = 0, \quad t \in [0, t_1 - r] \cup [T_1 + r, T];$$

$$\eta(t) = 1, t \in V; \quad \eta(t) \ge 0, t \in [0, T].$$

Покажем, что справедливы неравенства

$$\int\limits_{I \cup J} \|D_t\omega\|_0^2 dt \le C_4\|f\|^2, \tag{3.10}$$

$$\varepsilon \int\limits_V \|D_t^2\omega\|_0^2 dt + \int\limits_V \left[\|D_t\omega\|_0^2 + \|D_t\omega\|_1^2\right] dt$$

$$\le C_5\|f\|^2, \tag{3.11}$$

Путем интегрирования по частям из (3.7), (3.8) установим, что

$$(f, \xi_1\omega_t) = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{V_0} \xi_{1t}\|\omega_t\|_0^2 dt - \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} \xi_{1t} dt \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j}$$

$$+ c\omega^2\Big] dx + \int\limits_{Q} k\xi_1\omega_t^2 dQ - \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} \xi_1 dt \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij_t}\omega_{x_i}\omega_{x_j} + c_t\omega^2\Big] dx.$$

Отсюда в силу оценки (3.9) следует неравенство (3.10).

Аналогично имеем равенство

$$-(f, \eta\omega_{tt}) = \varepsilon\int\limits_{0}^{T} \eta\|\omega_{tt}\|_0^2 dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q} \eta\big[k_t\omega_t^2\big] dQ$$

$$+ \int\limits_{Q} \eta\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\omega_{tx_i}\omega_{tx_j} + c\omega_t^2\Big] dQ + \frac{1}{2}\int\limits_{Q} k\eta_t\omega_t^2 dQ$$

$$+ \int\limits_{Q} (\eta c)_t \omega\omega_t dQ - \frac{1}{2}\int\limits_{Q} (\eta c)_{tt}\omega^2 dQ. \tag{3.12}$$

Заметим, что $supp \quad \eta_t \subseteq I \cup J$. Поэтому на основании неравенства (3.10) и оценки (3.9) получим, что верно неравенство (3.11).

В силу оценок (3.9)-(3.11) нетрудно показать, что предельный элемент $u(x,t)$ некоторой последовательности $\{u^{N_i,\varepsilon_j}\}$ является обобщенным решением краевой задачи (3.1)-(3.3) из $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, и имеет место неравенство

$$\|u\|_{1,0}^2 + \int\limits_{t_1}^{T_1} (\|u_t\|_0^2 + \|u_t\|_1^2) dt \le C_6\|f\|_{0,1}^2. \tag{3.13}$$

Для $0 < \eta < T$ найдутся числа t_1, T_1 удовлетворяющие вышеуказанным свойствам и такие, что $0 < t_1 < \eta, \quad T - \eta < T_1$.

Возьмем функцию $\zeta(t) \in C_0^\infty(0,T)$, такую, что

$$\zeta(t) = 0, \quad t \in [0, t_1] \cup [T_1, T];$$

$$\zeta(t) = 1, \quad t \in [\eta, T-\eta].$$

Тогда функция $v(x,t) = \zeta(t)u(x,t)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$v_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} v_{x_j}) + cv = F, \qquad F = \zeta f - kv_t + v_t + ku\zeta_t,$$

где правая часть F на основании (3.13) принадлежит $L_2(Q)$. Стало быть, $v \in W_2^{2,1}(Q)$ или $u \in W_2^{2,1}(Q_\eta)$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда для любой функции $f \in W_2^{0,1}(Q)$ существует, и притом единственное, решение $u(x,t)$ краевой задачи (3.1)-(3.3) из $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Единственность регулярного решения задачи (3.1)-(3.3) непосредственно следует из леммы 3.1. Обобщенное решение задачи (3.1)-(3.3), построенное в теореме 3.3, принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_\eta)$ при $0 < \eta < T$. Но уравнение (3.1) в области $Q \backslash Q_{2\eta}$ является параболическим для достаточно малых η[19]. Поэтому функция $u(x,t)$ принадлежит $W_2^{2,1}(Q \backslash Q_\eta)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ и будет искомым решением задачи (3.1)-(3.3) из $W_2^{2,1}(Q)$. При этом уравнение (3.1) удовлетворяется почти всюду в Q , и краевые условия (3.2), (3.3) принимаются в среднем. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 3.5. Пусть выполнено условие $c - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0$ и $k(x,0) > 0$, $\quad k(x,T) > 0$, или $k(x,0) > 0$, $\quad k(x,T) < 0$, или $k(x,0) < 0$, $\quad k(x,T) < 0$.

Тогда для любой функции $f \in W_2^{0,1}(Q)$ существует, и притом единственное, решение $u(x,t)$ краевой задачи (3.1)-(3.3) из $W_2^{2,1}(Q)$.

ПОЯСНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. R^n - n - мерное евклидово пространство.
2. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ - точка в пространстве R^n.
3. $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ - обозначение частных производных по x_i.
4. $D_t^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ - частная производная по t порядка k.
5. $(u, v)_0 = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.
6. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ - пространство Соболева, полученное замыканием финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$.
7. $W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева: множество функций из $L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные из $L_2(Q)$ по x до порядка m и по t до порядка s включительно.
8. $W_2^{-1,0}(Q)$ - негативное пространство Лакса: множество функций из $L_2(Q)$ с конечной нормой

$$||f||_{W_2^{-1,0}(Q)} = \sup_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)} \frac{(f,v)}{||v||_{W_2^{1,0}(Q)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 802 с.

3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.

4. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

6. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, №6. С. 1098-1105.

7. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. 84 с.

8. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

9. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 238 с.

10. Дубинский Ю.А. Краевые задачи для некоторых классов дифференциально -операторных уравнений высокого порядка// Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, №1. С. 32-35.

11. Егоров И.Е. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка //Докл. АН СССР. 1987. Т.293, №4. С. 785-788.

12. Егоров И.Е., Федоров В.Е. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа высокого порядка // Методы прикладной математики и математической физики. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1987. С. 8-14.

13. Егоров И.Е. Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, №6. С. 1301-1304.

14. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.
15. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 204 с.
16. Кожанов А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной //Сибирск. мат. журн. 1994. Т.35, №2. С. 359-376.
17. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
18. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 400 с.
19. Михайлов В.П. О первой краевой задаче для одного класса гипоэллиптических уравнений // Мат. сборник. 1964. Т. 63(105), №2. С. 238-264.
20. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7-252.
21. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 156 с.
22. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.
23. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
24. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 107 с.
25. Терехов А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применения методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. С. 128-136.
26. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
27. Федоров В.Е. Теорема единственности обобщенного решения одной краевой задачи для уравнения смешанного типа

// Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С. 193-196.

28. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико - параболических уравнений второго порядка // Математика. Сборник переводов. 1963. Т.7, №6. С. 99-121.

29. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебное пособие

Иван Егорович Егоров

Валерий Евстафьевич Федоров

Редактор *М. М. Лыткина*

Техн. редактор *И. В. Соловьева*

Подписано в печать 21.12.98. Формат 60x84/16. Бумага тип. №2.
Печать офсетная. Печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 200 экз.
Заказ 122

Издательство ЯГУ. 677891, г. Якутск, ул. Белинского, 58